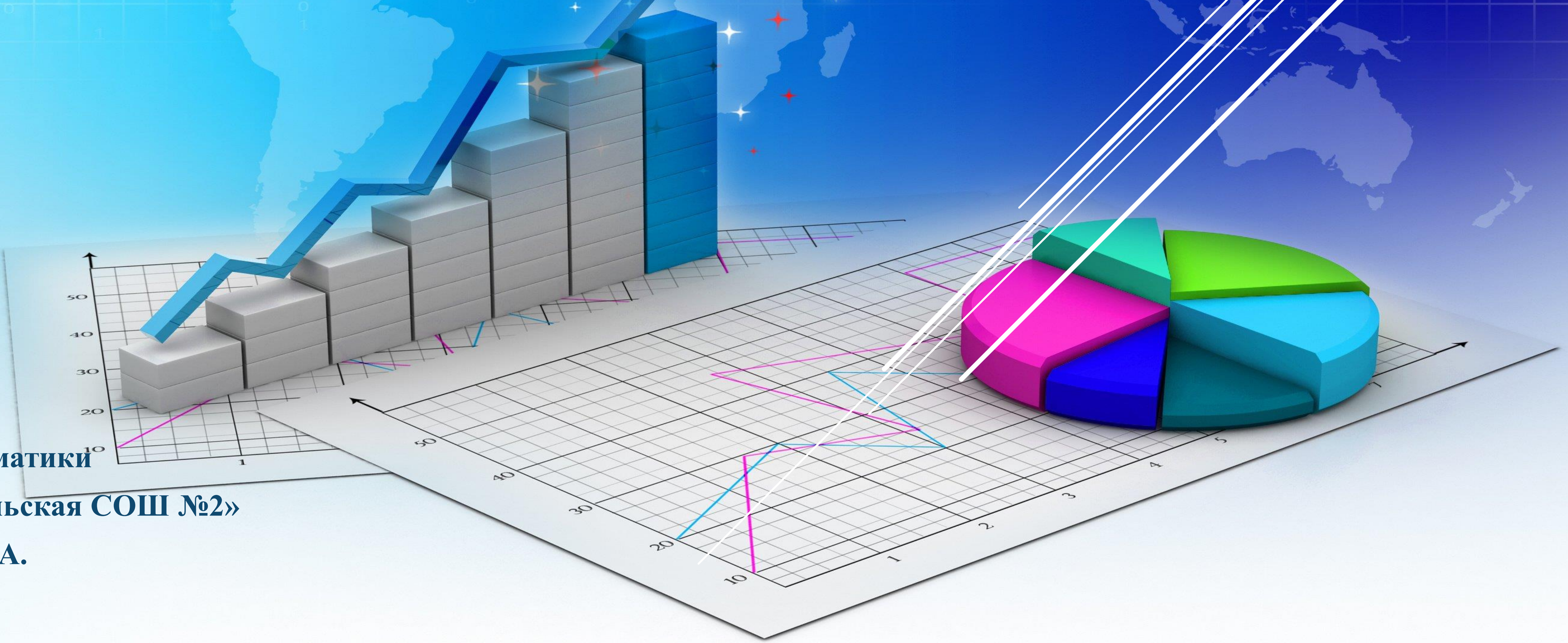
ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Подготовила:
учитель математики
МКОУ «Рутульская СОШ №2»
Гасантаева А.А.
10 класс

СЛУЧАЙ, КОГДА СОБЫТИЯ НЕСОВМЕСТИМЫ

Если события А и В не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они несовместны, их пересечение является невозможным событием. Поэтому вероятность пересечения несовместных событий равна нулю: $P(A \cap B) = 0$.

ПРИМЕР 1.

- Игральную кость бросают дважды. Рассмотрим событие А «в первый раз выпало больше очков, чем во второй» и событие В «в первый раз выпало меньше очков, чем во второй». Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие каждому из этих событий.
- Общих элементарных событий у событий А и В нет, ведь не может случиться так, что в первый раз выпало больше и одновременно меньше очков, чем во второй. События А и В несовместны. Поставим вопрос: чему равна вероятность объединения $A \cup B$? Элементарные события равновозможны.
- Нужно пересчитать все элементарные события, которые благоприятствуют событию А и которые благоприятствуют событию В, сложить полученные числа и разделить сумму на общее число элементарных событий 36:

- $P(A \cup B) = \frac{N(A)+\ N(B)}{N} = \frac{15\ +\ 15}{36} = \frac{5}{6}.$

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 1	Элементарные события, благоприятствующие событию А
3; 5	Элементарные события, благоприятствующие событию В

- Обратите внимание: можно разбить дробь на два слагаемых:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

т. е. вероятность объединения двух событий оказалась равна сумме вероятностей этих событий. Это свойство верно для любых двух несовместимых событий в любом случайном опыте.

- **Правило сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

ПРИМЕР 2

Антон и Тимур ходят в шахматный клуб и часто играют между собой в шахматы. По статистике, примерно в 25% партий выигрывал Антон, в 15% — Тимур и 60% партий закончилась вничью. С какой вероятностью в очередной партии Тимур не проиграет?

Рассмотрим три события:

A = «выиграет Антон»;
B = «выиграет Тимур»;
C = «партия закончится вничью».

По условию задачи $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}15$, $P(C) = 0{,}6$. Событие «Тимур не проиграет» означает, что Тимур выиграет или будет ничья, т. е. оно равно объединению $B \cup C$. Поскольку события B и C несовместны, то

$$P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}15 + 0{,}6 = 0{,}75.$$

ПРИМЕР 3

Марина решила поработать на летних каникулах и отправила заявки в два сетевых супермаркета. Вероятность положительного ответа от первого супермаркета составляет 0,7, от второго — 0,4. С какой вероятностью она получит хотя бы один положительный ответ?

Обозначим A, B два события, о которых идёт речь в задаче:

A = «первый супермаркет ответит положительно»;
B = «второй супермаркет ответит положительно».

Тогда $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$. Хотя бы один положительный ответ Марина получит, если произойдёт хотя бы одно из двух событий A или B, что равносильно объединению $A \cup B$.

Можно подумать, что для вычисления $P(A \cup B)$ нужно сложить вероятности событий A и B:

$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}7 + 0{,}4 = 1{,}1.$

Полученная вероятность оказалась больше 1 — но такого не может быть!

Где же допущена ошибка? Было забыто главное условие, при котором можно складывать вероятности: события A и B должны быть **несовместными**! В нашем случае они, конечно, совместны: Марина вполне может получить положительные ответы сразу от двух супермаркетов. Значит, пользоваться формулой для вероятности объединения несовместных событий в этом примере нельзя.

Если события A и B не являются несовместимыми, т. е. они **совместны** и могут оба наступить в результате одного опыта, то к ним нельзя применить правило для несовместимых событий. Убедимся в этом на примере.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

ПРИМЕР 4

Бросают две правильные игральные кости. Событие А – «на первой кости выпало меньше 3 очков». Событие В – «на второй кости выпало меньше 3 очков».

Событию А благоприятствует 12 элементарных событий. Событию В благоприятствует тоже 12 элементарных событий. Но четыре элементарных события общие, поскольку события А и В совместны. Событию $A \cup B$ благоприятствуют 20 элементарных событий.

Поэтому

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ \text{а}\ P(A \cup B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9},$$

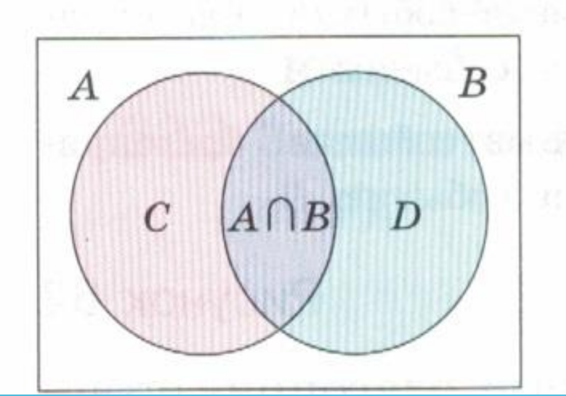
Очевидно, $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{9}$, значит, $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$,

поскольку $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} > \frac{5}{9}$.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

2; 3	Элементарные события благоприятствующие событию А
3; 2	Элементарные события, благоприятствующие событию В
2; 1	Элементарные события, благопри – ятствующие обоим событиям

Как быть, если события совместны? Изобразим на диаграмме Эйлера события A и B, у которых есть общие благоприятствующие элементарные события.



Рассмотрим два события: событие C «наступило A, но не наступило B» и событие D «наступило B, но не наступило A». На диаграмме видно, что события C и $A \cap B$ несовместны, поскольку соответствующие фигуры не имеют общих точек. Вместе эти события образуют событие A. Поэтому по правилу сложения вероятностей для несовместных событий находим:

$$P(A) = P(C) + P(A \cap B)$$

Точно так же получаем

$$P(B) = P(D) + P(A \cap B)$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$P(A) + P(B) = P(C) + P(A \cap B) + P(D) + P(A \cap B).$$

События C, $A \cap B$ и D несовместны и вместе образуют событие $A \cup B$. Получаем

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

откуда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность объединения двух событий равна сумме их вероятностей без вероятности их пересечения:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Полученная формула справедлива для любых двух событий, в том числе для несовместных, поскольку в случае несовместных событий $P(A \cap B) = 0$.

ПРИМЕР 5

Из колоды, в которой 36 карт, вытаскивают наугад одну карту. С какой вероятностью эта карта будет дамой или пикой?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два события:

A = «из колоды вытянут даму»;

B = «из колоды вытянут пику».

Вероятности этих событий можно посчитать по классическому определению — как отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов опыта. Всего карт в колоде 36, а дам — 4, поэтому $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Поскольку всего разных мастей в колоде 4, то карт пиковой масти 36 : 4 = 9, поэтому $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Нам нужно найти вероятность объединения $A \cup B$. Чтобы воспользоваться для этого доказанной выше формулой, осталось найти $P(A \cap B)$. Но событие $A \cap B$ означает, что вынутая карта является одновременно и дамой, и картой пиковой масти, т. е. это дама пик. Такая карта всего одна, поэтому $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Подставим все полученные вероятности в формулу и найдём ответ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 6

В зале ожидания стоят два автомата по разливу кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в первом автомате, — 0,1, во втором — тоже 0,1. Вероятность, что кофе закончится в обоих автоматах, — 0,05. С какой вероятностью к концу дня кофе останется в обоих автоматах?

Рассмотрим два события:

A = «кофе останется в первом автомате»;
B = «кофе останется во втором автомате».

Тогда событиями, о которых идёт речь в задаче, будут:

$\overline{A}$ = «кофе закончится в первом автомате»;
$\overline{B}$ = «кофе закончится во втором автомате».

Нам даны вероятности $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, а найти нужно $P(A \cap B)$. Чтобы воспользоваться формулой суммы, перейдём к противоположному событию $\overline{A \cap B}$ и применим закон де Моргана:

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

По формуле суммы для совместных событий

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}1 + 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}15.$$

Отсюда $P(A \cap B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

ЗАДАНИЕ 1

События U и V несовместны. Найдите вероятность их объединения, если:

а) $P(U) = 0{,}2$, $P(V) = 0{,}4$;

б) $P(U) = 0{,}5$, $P(V) = 0{,}2$.

ЗАДАНИЕ 2

Вычислите $P(A \cup B)$, если:

а) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}4$;

б) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}3$.

ЗАДАНИЕ 3

Вычислите $P(A \cap B)$, , если:

а) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}9$;

б) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}8$.

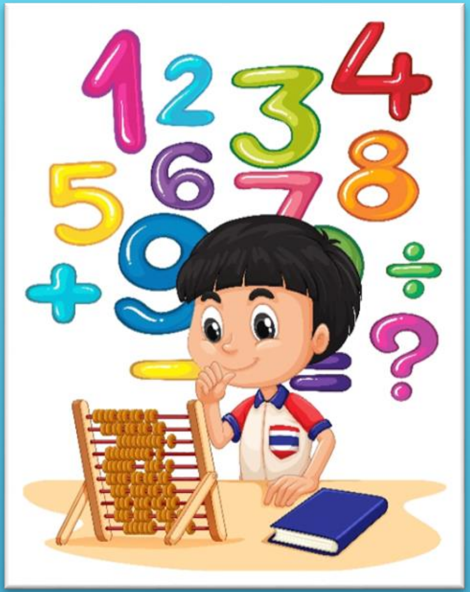
ЗАДАНИЕ 4

В торговом центре недалеко друг от друга расположены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к вечеру в первом автомате закончится кофе, равна 0,3. Такая же вероятность того, что кофе закончится во втором автомате. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность события:

а) «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов»;

б) «кофе закончится в одном из автоматов, а в другом нет».

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:



1. Бросают одну игральную кость. Событие А – «выпало чётное число очков». Событие В – «выпало число очков, кратное пяти».

а) Являются ли события А и В несовместными?

б) Используя правило сложения вероятностей, найдите $P(A \cup B)$.

2. В банке рядом друг с другом стоят два банкомата – старый и новый. Вероятность того, что в течение дня в старом банкомате закончатся денежные купюры, равна 0,2. Вероятность того, что купюры закончатся в новом банкомате, равна 0,1. В двух банкоматах купюры могут закончиться с вероятностью 0,05. Найдите вероятность события:

а) «в течение дня купюры закончатся хотя бы в одном из банкоматов»;

б) «в течение дня купюры не закончатся ни в одном из банкоматов»;

в) «в течение дня купюры закончатся только в старом банкомате»;

г) «к вечеру купюры останутся хотя бы в одном из банкоматов».